Antwoordenboekje

LIMO

Nijmegen

Vrijdag
2 juni 2006

Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade 2006

technische universiteit eindhoven

Industrial an
Applied
mathematics

Waarom masteropleiding Industrial and Applied Mathematics?

- ontwikkeling nieuwe en innovatieve technologie
- wiskundige modellering
- bijdragen aan problemen uit technologie en industrie
- in Eindhoven in high-tech omgeving

Industrial and Applied Mathematics:

3 specialisaties

- Computational Science and Engineering
  Complexe natuurkundige en technische processen analyseren en simuleren
- Discrete Mathematics and Applications
  Van crystallografische roosters tot optimalisering van netwerken en chips, van computeralgebra tot cryptografische schema's
- Statistics, Probability, and Operations Research
  Modellering, analyse en optimalisatie van deterministische en toevallige processen

Meer info: www.win.tue.nl/iam

1 Een eigenwaardenprobleem

M.A. Botchev, Universiteit Twente

Stel dat P de matrix van het lemma is. Uit (1) volgt dat $A = V\Lambda V^{-1}$ en $B = W\Gamma W^{-1}$.

$$
\begin{aligned}
A \otimes B &= \begin{bmatrix} a_{11}W\Gamma W^{-1} & \dots & a_{1n}W\Gamma W^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}W\Gamma W^{-1} & \dots & a_{nn}W\Gamma W^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} W & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & W \end{bmatrix}}_{\hat{W}} \begin{bmatrix} a_{11}\Gamma & \dots & a_{1n}\Gamma \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\Gamma & \dots & a_{nn}\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & W^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \hat{W}(A \otimes \Gamma)\hat{W}^{-1} \\
&= \hat{W}P^T(\Gamma \otimes A)P\hat{W}^{-1} \\
&= \hat{W}P^T(\Gamma \otimes (V\Lambda V^{-1}))P\hat{W}^{-1} \\
&= \hat{W}P^T \begin{bmatrix} \gamma_1 V\Lambda V^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 V\Lambda V^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_m V\Lambda V^{-1} \end{bmatrix} P\hat{W}^{-1} \\
&= \hat{W}P^T \underbrace{\begin{bmatrix} V & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & V \end{bmatrix}}_{\hat{V}} \begin{bmatrix} \gamma_1\Lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2\Lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_m\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & V^{-1} \end{bmatrix} P\hat{W}^{-1} \\
&= \hat{W}P^T\hat{V}(\Gamma \otimes \Lambda)\hat{V}^{-1}P\hat{W}^{-1} \\
&= \hat{W}P^T\hat{V}(\Gamma \otimes \Lambda)(\hat{W}P^T\hat{V})^{-1}
\end{aligned}
$$

Hier is de matrix $\Gamma \otimes \Lambda$ diagonaal en bevat de eigenwaarden van $A \otimes B$. De eigenvectoren van $A \otimes B$ zijn de kolommen van de matrix $\hat{W}P^T\hat{V}$.

2 Priemgetallen

F.J. Keune, Radboud Universiteit Nijmegen

Rijen (x_n) van complexe getallen die voldoen aan $x_{n+2} = x_{n+1} - 2x_n$ voor alle $n \geq 0$ vormen een 2-dimensionale complexe vectorruimte. Laten α en β de twee oplossingen zijn van $x^2 = x - 2$. De meetkundige rijen (α^n) en (β^n) vormen een basis. De gegeven rij is de rij $(\alpha^n + \beta^n)$. In de ring $\mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-7}]$ geldt

$$\alpha^p + \beta^p \equiv (\alpha + \beta)^p \pmod{p},$$

ofwel $a_p \equiv 1 \pmod{p}$. Dus $a_p - 1 = p\gamma$ met $\gamma \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-7}] \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

3 Pi als breuk?

N.P. Landsman, Radboud Universiteit Nijmegen

1.
$$\begin{aligned} F_n(x) &= b^n\big(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)} + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\big) \\ &= b^n\big((\tfrac{a}{b})^n f_n(x) - (\tfrac{a}{b})^{n-1} f_n^{(2)} + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\big) \\ &= \big(a^n f_n(x) - a^{n-1} b f_n^{(2)} + \cdots + (-1)^n b^n f_n^{(2n)}(x)\big) \end{aligned}$$

Als we nu kunnen bewijzen dat $f_n^{(k)}(0)$ en $f_n^{(k)}(1)$ voor iedere k gehele getallen zijn, zijn we klaar.

Met het binomium van Newton kunnen we $f_n(x)$ als volgt schrijven:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \tfrac{1}{n!} x^n \textstyle\sum_{i=0}^n (-x)^i \binom{n}{i} \\ &= \tfrac{1}{n!} \textstyle\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i x^{n+i} \end{aligned}$$

Algemeen kunnen we f_n dus schrijven als:

$$f_n(x) = \sum_{j=n}^{2n} a_j x^j.$$

Voor $k < n$ geldt $f_n^{(k)}(0) = 0$. Voor $k \geq n$ geldt:

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(x) &= \textstyle\sum_{j=k}^{2n} j \cdots (j-k+1) a_j x^{j-k} = \sum_{j=k}^{2n} \frac{j!}{(j-k)!} a_j x^{j-k} \\ f_n^{(k)}(0) &= \tfrac{k!}{(k-k)!} a_k = k! \cdot \tfrac{1}{n!} (-1)^{k-n} \binom{n}{k-n} \\ &= (-1)^{k-n} \binom{n}{k-n} \cdot k \cdot \ldots \cdot (n+1) \end{aligned}$$

Omdat $\binom{n}{k-n} \in \mathbb{Z}$, geldt dat $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

Dus $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ voor iedere k, en dus is $F_n(0)$ geheel.

Door substitutie ziet men $f_n(x) = f_n(1-x)$. Dan ook:
$f_n^{(k)}(x) = f_n^{(k)}(1-x)$ voor alle k.
Hieruit volgt dat voor alle k geldt dat $f_n^{(k)}(1) = f_n^{(k)}(0)$. Dus is $f_n^{(k)}(1)$ geheel voor iedere k.
Dus $F_n(1)$ is geheel.

2. $\frac{d}{dx}\big[\frac{1}{\pi} F_n'(x)\sin(\pi x) - F_n(x)\cos(\pi x)\big] = \pi \sin(\pi x)\big(\frac{1}{\pi^2} F_n''(x) + F_n(x)\big)$
Uit de definitie volgt

$$\frac{1}{\pi^2} F_n''(x) = b^n\big(\pi^{2n-2} f^{(2)}(x) - \pi^{2n-4} f_n^{(2)}(x) + \cdots + (-1)^{n-1} f_n^{(2n)}(x)\big)$$

En dus

$$F_n(x) + \frac{1}{\pi^2}F_n''(x) = b^n\pi^{2n}f_n(x) = b^n\frac{a^n}{b^n}f_n(x) = a^nf_n(x)$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\pi}F_n'(x)\sin(\pi x) - F_n(x)\cos(\pi x)\right] = \pi\sin(\pi x)a^nf_n(x)$$

$$\begin{aligned}\text{Dus } \pi a^n \textstyle\int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x)dx &= \left[\tfrac{1}{\pi}F_n'(x)\sin(\pi x) - F_n(x)\cos(\pi x)\right]_0^1 \\ &= F_n(0) + F_n(1)\end{aligned}$$

3. Op $[0,1]$ geldt $0 \leq \sin(\pi x) \leq 1$.
   Ook geldt op $[0,1]$ dat $0 < x^n(1-x)^n < 1$.
   Dus

$$0 < \int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x) < \frac{1}{n!}$$

$$0 < \pi a^n\int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x) < \frac{\pi a^n}{n!}$$

   Met vraag 2 volgt hieruit:

$$0 < F_n(0) + F_n(1) < \frac{\pi a^n}{n!}$$

4. Uit vraag 3 volgt met de Stirlingformule dat:

$$0 < F_n(0) + F_n(1) < \frac{\pi a^n}{n!} \sim \frac{\pi a^n}{\sqrt{s\pi n}e^{-n}n^n} = \frac{\pi(e\cdot a)^n}{\sqrt{2\pi n}n^n} = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi n}}\cdot\left(\frac{e\cdot a}{n}\right)^n$$

   De limiet van $\frac{\pi}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{a\cdot e}{n}\right)^n$ voor $n\to\infty$ is 0, dus vanaf zekere n is $\frac{\pi}{\sqrt{2\pi n}}\cdot\left(\frac{e\cdot a}{n}\right)^n$ kleiner dan 1.

   Dus vanaf bepaalde n:

$$0 < F_n(0) + F_n(1) < 1.$$

   Maar $F_n(0)$ en $F_n(1)$ zijn gehele getallen. Tegenspraak. Dus π is geen rationaal getal.

4 Een toren van machten

H.W. Lenstra, Universiteit Leiden

Deze getallen bestaan niet. Om dit te bewijzen, bekijken we eerst de vergelijking

$$a^{a^k} = b^{b^l} \tag{1}$$

met a, b, k en l positieve gehele getallen en $a < b$. Het is duidelijk dat $a > 1$. Zij c een reëel getal waarvoor geldt: $b = a^c$, dan $c > 1$. Wanneer we de logaritme met basis a van (1) nemen, krijgen we

$$a^k = c \cdot b^l. \tag{2}$$

Hieruit volgt dat c rationaal is.
Zij d een reëel getal waarvoor geldt: $c = a^d$. Dan is $d > 0$ (want $c > 1$ en a is geheel) en wanneer we de logaritme met basis a van (2) nemen, krijgen we

$$k = d + c \cdot l. \tag{3}$$

Hieruit volgt dat d rationaal is, dus is er een positieve gehele e zodat $c^e = (a^d)^e$ een geheel getal is. Omdat c rationaal is, volgt hieruit dat c een geheel getal is. Uit (3) volgt dat d ook een geheel getal is. We kunnen (1) dus oplossen door positieve gehele getallen a, b, k en l te nemen, zo dat:

$$b = a^{a^d}, \qquad k = d + a^d \cdot l. \tag{4}$$

Om het originele probleem op te lossen is het voldoende te laten zien dat k geen macht kan zijn van a.
Zij $k = a^h$. Dan $a^h = d + a^d l > a^d$, dus $h > d$, en daarom is $d = a^h - a^d l$ deelbaar door a^d. Dit is in tegenspraak met $0 < d < a^d$. Dus k is geen macht van a, en dus bestaan er geen positieve gehele getallen a, b, n en m, zo dat $a \neq b$, $n \geq 2$, $m \geq 2$ en

$$\left.a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}\right\}n = \left.b^{b^{b^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{b}}}}}}\right\}m.$$

5 De ijzergieterij

R.D. Nobel, Vrije Universiteit

Introduceer de volgende beslissingsvariabelen voor $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ en $k = 1, \ldots, t$

$$\begin{aligned} x_{ijk} &= \text{het aantal ton van metaal } i \text{ in legering } j \text{ afkomstig uit erts } k, \\ y_j &= \text{het aantal ton te produceren van legering } j, \\ w_k &= \text{het aantal ton in te kopen van erts } k. \end{aligned}$$

Dan krijgen we de volgende LP-formulering:

$$\min z = \sum_{k=1}^{t}(C_k + S_k)w_k + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{t} D_{ik}x_{ijk} + \sum_{j=1}^{n}(B_j - G_j)y_j$$

$$\sum_{k=1}^{t} w_k \leq E$$

$$\sum_{k=1}^{t} T_k w_k + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{t} F_{ik}x_{ijk} + \sum_{j=1}^{n} U_j y_j \leq W$$

$$V_j \leq y_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{t} x_{ijk} \quad \text{voor} \quad j = 1, \ldots, n$$

$$100\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \leq P_{ik}w_k \quad \text{voor} \quad i = 1, \ldots, m; \; k = 1, \ldots, t$$

$$R_{ij}y_j \leq 100\sum_{k=1}^{t} x_{ijk} \leq Q_{ij}y_j \quad \text{voor} \quad i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{k=1}^{t} T_k w_k \leq 0.3W, \qquad \sum_{j=1}^{n} U_j y_j \geq 0.1W$$

$$0.4W \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{t} F_{ik}x_{ijk} \leq 0.6W$$

$$x_{ijk} \geq 0, \quad y_j \geq 0, \quad w_k \geq 0 \quad \text{voor} \quad i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n; \; k = 1, \ldots, t.$$

6 Bijzondere functies

F. Takens, Rijksuniversiteit Groningen

In het volgende is $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ een continue afbeelding en zijn $J_1, J_2, \ldots$ begrensde gesloten intervallen in $\mathbf{R}$. We zeggen dat g het interval J_1 *over* het interval J_2 afbeeldt als $J_2 \subset g(J_1)$.

De volgende beweringen zijn eenvoudig te bewijzen:
1. Als g het interval J_1 over zichzelf afbeeldt, dat heeft g een dekpunt (dit is periodiek punt met periode één) in J_1.
2. Als g de intervallen $J_1, \ldots, J_k$ afbeeldt over de intervallen $J_2, \ldots, J_{k+1}$, respectievelijk en als $J_{k+1} = J_1$, dan is er een punt $p \in J_1$ zodat $g^i(p) \in J_{i+1}$ voor $i = 1, \ldots, k-1$ en $g^k(p) = p$.

We passen het bovenstaande toe op de intervallen gedefinieerd door het punt met periode vier in de opgave: we definiëren $I_1 = [p, f(p)], I_2 = [f(p), f^3(p)],$ en $I_3 = [f^3(p), f^2(p)]$. In de beschreven situatie wordt het interval I_2 zowel over zichzelf als over I_3 afgebeeld; I_3 wordt over I_2 afgebeeld.
Voor elke k bestaat er dus een punt $q \in I_2$ zodat zodat $f^i(q) \in I_2$ voor $i = 1, \ldots, k-2$, $f^{k-1}(q) \in I_3$ (als $k > 1$) en $f^k(q) = q$. Het is eenvoudig na te gaan dat q een periodiek punt van periode k is.

KNAW

OPTIVER

DERIVATIVES TRADING

Market maker:

de onverwachte loopbaan

Ooit gedacht dat jij opties zou prijzen en verhandelen? Posities opbouwen in derivaten en aandelen? Risico management doen en handelsmodellen verbeteren? Toch hebben veel market makers/traders een technische achtergrond. Wat onze market makers ook gemeenschappelijk hebben is hun superieure rekenvaardigheid, stressbestendigheid en besluitvaardigheid. Maak je geen zorgen, je hoeft niets van opties af te weten als je bij ons in dienst treedt. Je leert het allemaal tijdens de interne opleiding van 4 tot 5 weken.

Wel moet je een aantal eigenschappen hebben die niet aan te leren zijn: een competitieve geest, een resultaatgerichte instelling en een heel goed analytisch inzicht. Wij zoeken market makers/traders; jonge, initiatiefrijke academici - liefst zonder (relevante) werkervaring - met een excellent cijfermatig inzicht. We verwachten een grote zelfwerkzaamheid want je blijft leren gedurende je loopbaan binnen Optiver. Je moet hier zelf veel tijd en energie in steken maar er staat ook veel tegenover: Optiver biedt je de kans om jezelf te ontplooien binnen een professionele, internationale handelsorganisatie.

Heb jij een sterke drive om te winnen en ben je niet bang om verantwoordelijkheid te dragen?

Stuur dan een motivatie met curriculum vitae naar: humanresources@optiver.com

Optiver handelt in derivaten, aandelen en obligaties vanuit het Amsterdamse hoofdkantoor en vanuit de filialen in Chicago en Sydney.

Kijk voor meer informatie op www.optiver.com

Optiver

DERIVATIVES TRADING

Optiver, afdeling Human Resources. De Ruyterkade 112, 1011 AB Amsterdam, T 020 - 5319000

Optiver zoekt market makers/traders

Acquisitie n.a.v. deze advertentie wordt niet op prijs gesteld.

7 Naar beneden afronden

R. Tijdeman en S.W. Rosema, Universiteit Leiden

a) Uit $ad - bc = \pm 1$ volgt $\frac{d}{b} - \frac{c}{a} = \pm\frac{1}{ab}$. Uit $\frac{c+\frac{1}{b}}{a} = \frac{d}{b}$ en $b > 1$ volgt $\left\lfloor \frac{c}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{d}{b} \right\rfloor$. Uit $\frac{d+\frac{1}{a}}{b} = \frac{c}{a}$ en $a > 1$ volgt eveneens $\left\lfloor \frac{c}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{d}{b} \right\rfloor$.

b) Stel $a < c$. Dan $c \geq 2$. Verder $ad \geq bc - 1 \geq -1$, dus $d \geq -1$.

Als $a, b > 1$, dan $\left\lfloor \frac{d}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{c}{a} \right\rfloor \geq 1$, dus $d \geq b$ en $c + d > a + b$.
Dus $a = 1$ of $b = 0$ of $b = 1$.

Stel $a = 1$. Dan $d < 1 + b - c \leq b - 1$.
Dus $ad - bc = d - bc < b - 1 - 2b = -b - 1 \leq -1$. Tegenspraak.

Stel $b = 0$. Dan $ad - bc = ad = \pm 1$ is in tegenspraak met $a > c + d \geq 2 - 1$.

Stel $b = 1$. Dan $d < a + 1 - c \leq 0$ en dus $d = -1$.
Hieruit volgt $ad - bc = -a - c < -1$. Tegenspraak.

Uit deze tegenspraken volgt dat $a \geq c$.

Groningen Math Masters

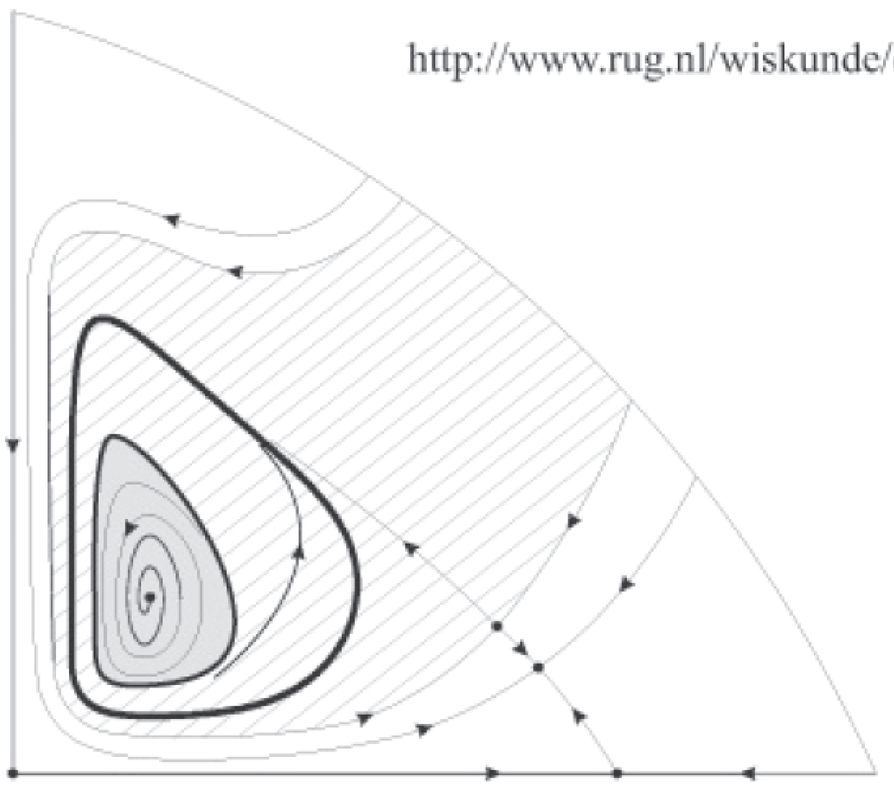
RuG

Wiskunde
Mathematics

Technische Wiskunde
Mathematics and Technology

Bedrijfswiskunde
Business Mathematics

http://www.rug.nl/wiskunde/onderwijs/master



8 Magische vierkanten

A.R.P. van den Essen, Radboud Universiteit Nijmegen

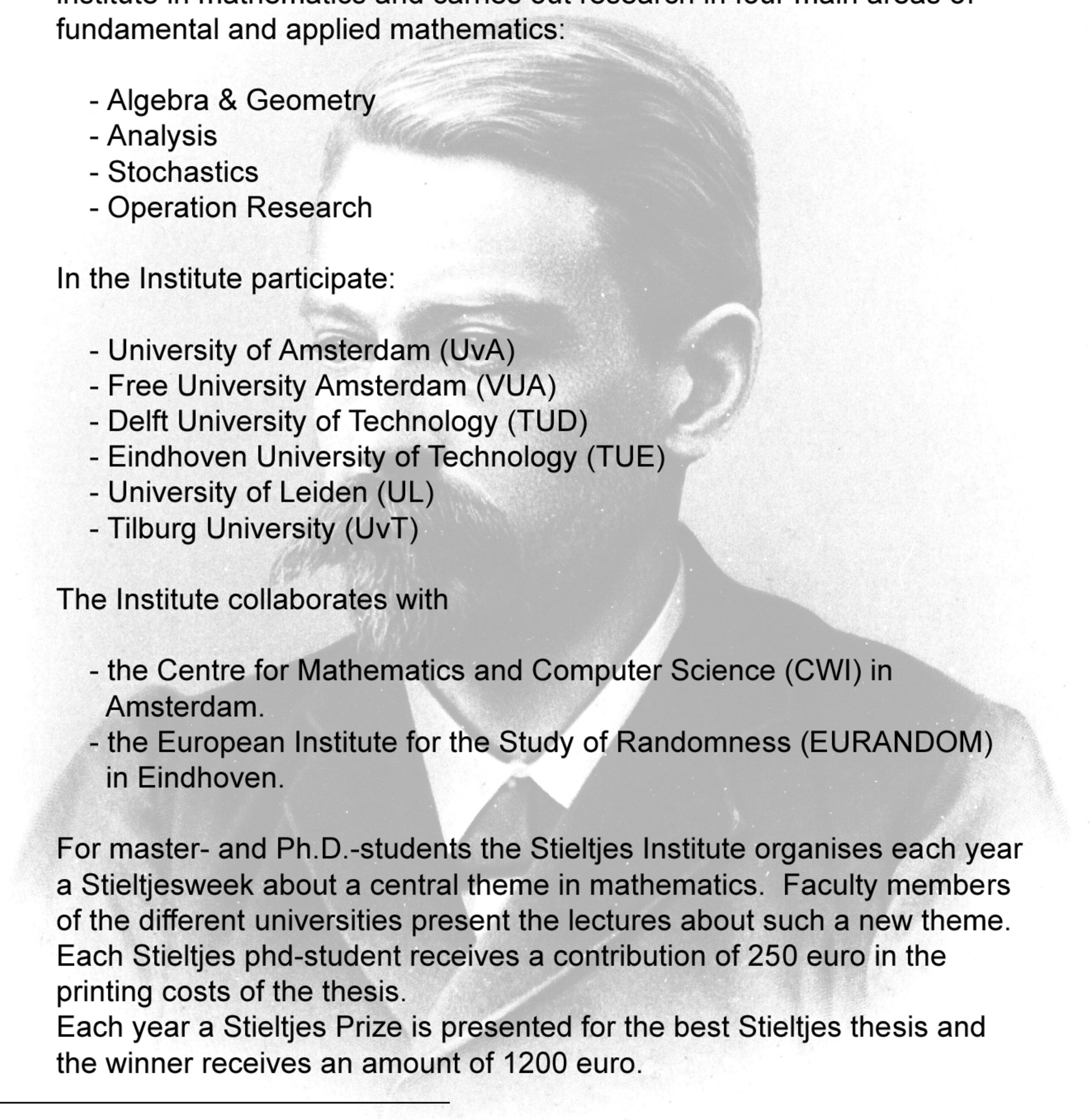
Eerst passen we Cayley-Hamilton toe op 3x3 magische vierkanten met spoor nul. Zij M zo'n matrix. Omdat $\mathrm{tr}(M) = 0$ volgt dat de magische som, genoteerd $s(M)$, nul is. Zij nu E de 3x3 matrix bestaande uit alleen maar enen. Dan $ME = s(M)E = 0$. Dus volgt dat $\det(M) = 0$.
Uit Cayley-Hamilton volgt dan dat $M^3 = cM$ voor zeker reeël getal c. Dus M^3 is magisch. Bijgevolg $M^5 = cM^3 = c^2M$ is ook magisch enzovoorts. Dus M^n is magisch voor iedere oneven n.

Zij nu M een willekeurig 3x3 magisch vierkant. Zij $N := M - (1/3)tr(M)E$. Dan is N magisch en $\mathrm{tr}(N) = 0$. Dus is volgens het voorgaande N^n magisch voor iedere oneven n. Merk nu op dat $EN = NE = s(N)E = 0$, en dus geldt

$$M^n = (N + (1/3)\mathrm{tr}(M)E)^n = N^n + ((1/3)\mathrm{tr}(M))^n E^n$$

welke magisch is, omdat N^n en $E^n = 3^{n-1}E$ magisch zijn.

Thomas Stieltjes Institute for Mathematics



The Thomas Stieltjes Institute for Mathematics is a Dutch research institute in mathematics and carries out research in four main areas of fundamental and applied mathematics:

- Algebra & Geometry
- Analysis
- Stochastics
- Operation Research

In the Institute participate:

- University of Amsterdam (UvA)
- Free University Amsterdam (VUA)
- Delft University of Technology (TUD)
- Eindhoven University of Technology (TUE)
- University of Leiden (UL)
- Tilburg University (UvT)

The Institute collaborates with

- the Centre for Mathematics and Computer Science (CWI) in Amsterdam.
- the European Institute for the Study of Randomness (EURANDOM) in Eindhoven.

For master- and Ph.D.-students the Stieltjes Institute organises each year a Stieltjesweek about a central theme in mathematics. Faculty members of the different universities present the lectures about such a new theme.
Each Stieltjes phd-student receives a contribution of 250 euro in the printing costs of the thesis.
Each year a Stieltjes Prize is presented for the best Stieltjes thesis and the winner receives an amount of 1200 euro.

---

http://www.stieltjes.org/
stieltjes@math.leidenuniv.nl
+31 71 527 7042

9 Bernoulli-polynomen

J. Top en G. Tiesinga, Rijksuniversiteit Groningen

(a) Schrijf $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$; dan $F' = f$ en $F(0) = 0$. Er geldt voor $f \in \mathcal{P}$ dat $\varphi(D(f)) = \varphi(f') = f(x+1) - f(x) = \Delta(f)$. Evenzo $D(\varphi(f)) = D(F(x+1) - F(x)) = f(x+1) - f(x)$. Dus inderdaad $\Delta = \varphi \circ D = D \circ \varphi$.

Ook is $\Delta(\varphi(f)) = \Delta(F(x+1) - F(x)) = F(x+2) - 2F(x+1) + F(x)$ en $\varphi(\Delta(f)) = \varphi(f(x+1) - f(x)) = F(x+2) - 2F(x+1) + F(x)$. Dit bewijst dat $\Delta \circ \varphi = \varphi \circ \Delta$.

Tenslotte is $\Delta(D(f)) = \Delta(f') = f'(x+1) - f'(x) = D(f(x+1) - f(x)) = D(\Delta(f))$. Dus $\Delta \circ D = D \circ \Delta$.

(b) Gebruik de notaties als in de uitwerking van het vorige onderdeel. We bepalen eerst de kern van φ. Geldt $\varphi(f) = 0$, dan is $F(x+1) = F(x)$. Met andere woorden, F is een veelterm die periodiek is met periode 1. Hieruit volgt, dat F constant is (zoniet, dan zou, omdat $F(0) = 0$, ieder geheel getal een nulpunt van F zijn, en een veelterm $\neq 0$ heeft slecht eindig veel nulpunten). Omdat F constant is, is $f = F' = 0$. Dus de kern van φ bestaat uit alleen de nulveelterm. Hieruit volgt, dat φ injectief is.

Om te bewijzen dat φ ook surjectief is, nemen we een willekeurig geheel getal $n \geq 0$. De lineaire deelruimte $\mathcal{P}_n$ van $\mathcal{P}$, bestaande uit alle veeltermen van graad $\leq n$, is eindig dimensionaal. Er geldt dat φ deze deelruimte weer binnen zichzelf afbeeldt, want $\varphi(x^k) = \frac{1}{k+1}\left((x+1)^{k+1} - x^{k+1}\right)$ heeft graad k, voor elke $k \geq 0$. Omdat φ beperkt tot deze eindig dimensionale deelruimte injectief is, is deze beperking ook surjectief. Dus x^n zit in het beeld van φ, voor elke $n \geq 0$. Hieruit volgt dat φ zowel injectief als surjectief is, en dus inverteerbaar.

(c) (1) Met notaties als in de oplossing van de vorige onderdelen, $\varphi(\mathcal{P}_n) = \mathcal{P}_n$. Het origineel van x^n is dus een veelterm van graad hoogstens n. Omdat $\varphi(\mathcal{P}_{n-1}) = \mathcal{P}_{n-1}$, kan dit origineel geen graad $\leq n-1$ hebben. Dus is de graad precies n.

(2) Er geldt $\varphi(D(B_n)) = D(\varphi(B_n)) = D(x^n) = nx^{n-1}$. Hierop de inverse van φ toepassen levert het gevraagde.

(3) Met behulp van onderdeel (1) volgt $\Delta(B_n) = D(\varphi(B_n)) = nx^{n-1}$.

(4) Uit (3) volgt $(m+1)k^m = B_{m+1}(k+1) - B_{m+1}(k)$. Links en rechts sommeren over $k = 0, \ldots, n-1$ levert de gevraagde formule.

(5) De formule is equivalent met degene die gekregen wordt door links en rechts φ toe te passen (immers, φ is inverteerbaar). We moeten dus aantonen

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}x^k = \frac{1}{n+1}\left((x+1)^{n+1} - x^{n+1}\right),$$

en hierin herkennen we de bekende binomiaalformule voor $(1+x)^{n+1}$.

(6) Uit (2) en (4) volgt, dat $\int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$ als $n \geq 1$. Samen met $B_0 = 1$ en $B_n' = nB_{n-1}$ karakteriseert deze eigenschap de Bernoulli-polynomen. Om (6) te bewijzen, is het dus voldoende te laten zien, dat de veeltermen in het rechterlid van de formule aan dezelfde drie eigenschappen voldoen.

Voor $n = 0$ staat er inderdaad de constante veelterm 1. Ook is in te zien, dat de afgeleide voor gegeven n precies n maal de uitdrukking voor $n-1$ is. Daarvoor gebruiken we, dat $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^{n-1} = 0$. Immers, dit is op een teken na gelijk aan $\Delta^n(x^{n-1})$ en $\Delta^n = \varphi^n \circ D^n$.

Tenslotte hebben we nodig, dat een nogal vervelende integraal gelijk is aan nul. Uitgeschreven (voor $n > 0$):

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{n+1} \left((1+k)^{n+1} - k^{n+1}\right) = 0.$$

Mocht iemand een korter, fraaier antwoord vinden van vraagstuk (6), dan kun je dat e-mailen naar limo@math.ru.nl.

10 Een statistisch vraagstuk

A.W. van der Vaart en R.W.J. Meester, Vrije Universiteit Amsterdam

1. De aannemelijkheidsfunctie L is per definitie de simultane kansdichtheid van $(X_1, \ldots, X_n)$ gezien als functie van (μ, σ), en de meest aannemelijke schatter is de locatie van het maximum van die functie. De aannemelijkheidsfunctie kan worden geschreven als

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma} e^{(X_i - \mu)/\sigma} 1_{X_i \leq \mu} = \frac{1}{\sigma^n} e^{(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu)/\sigma} 1_{\max(X_1, \ldots, X_n) \leq \mu}.$$

Voor iedere vaste σ is de functie $\mu \to L(\mu, \sigma)$ positief en dalend in μ op het interval $[\max(X_1, \ldots, X_n), \infty)$ en 0 op $(-\infty, \max(X_1, \ldots, X_n))$. Hieruit volgt dat het maximum wordt aangenomen in $\hat{\mu}_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, voor iedere vaste σ en onafhankelijk van de waarde van σ. Door differentiatie van $L(\hat{\mu}_n, \sigma)$ naar σ vinden we gemakkelijk dat de functie $\sigma \to L(\hat{\mu}_n, \sigma)$ zijn maximum aanneemt in $\hat{\sigma}_n$. Het simultane maximum wordt dan aangenomen in $(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)$.

2. De verdelingsfunctie van $n(\hat{\mu}_n - \mu)$ wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(n(\hat{\mu}_n - \mu) \leq x\big) &= \mathbb{P}\big(\hat{\mu}_n \leq \mu + x/n\big) = \mathbb{P}\big(X_i \leq \mu + x/n\big)^n \\ &= \Big(\int_{-\infty}^{\mu + x/n} f(s)\, ds\Big)^n. \end{aligned}$$

Voor $x > 0$ is deze uitdrukking gelijk aan 1, terwijl voor $x \leq 0$ invullen van f en primitivering leidt tot

$$\big(e^{x/(\sigma n)}\big)^n = e^{x/\sigma}.$$

De rij $n(\hat{\mu}_n - \mu)$ convergeert derhalve in verdeling naar de verdelingsfunctie F met $F(x) = e^{x/\sigma}$ voor $x \leq 0$ en $F(x) = 1$ voor $x \geq 0$.

3. De variabele S_n is het gemiddelde van de stochastische grootheden $Y_i = \mu - X_i$. De grootheden $Y_1, \ldots, Y_n$ zijn onafhankelijk en identiek verdeeld met

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Y_i &= \int (\mu - x) f(x)\, dx = \int_{\infty}^{\mu} (\mu - x) e^{(x-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sigma}\, dx = \sigma, \\ \mathbb{E}Y_i^2 &= \int (\mu - x)^2 f(x)\, dx = \int_{\infty}^{\mu} (\mu - x)^2 e^{(x-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sigma}\, dx = 2\sigma^2, \\ \mathbb{V}ar Y_i &= \mathbb{E}Y_i^2 - (\mathbb{E}Y_i)^2 = \sigma^2. \end{aligned}$$

Voor het evalueren van de integralen gebruiken we eenmaal, respectievelijk tweemaal, partiële integratie. De centrale limietstelling geeft nu dat de rij $\sqrt{n}(S_n - \sigma) = \sqrt{n}(\bar{Y}_n - \mathbb{E}\bar{Y}_n)$ in verdeling naar een normale verdeling met verwachting 0 en variantie σ^2 convergeert.

4. Uit de definities van $\hat{\sigma}_n$ en S_n volgt dat

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma) = \sqrt{n}(S_n - \sigma) + \sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu) \tag{1}$$

De eerste term aan de rechterkant is asymptotisch normaal verdeeld vanwege opgave 3, terwijl de tweede "van de orde $1/\sqrt{n} \to 0$" is vanwege opgave 2. De rij $\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma)$ is daarom asymptotisch normaal, met dezelfde parameters als de rij $\sqrt{n}(S_n - \sigma)$.
De details kunnen als volgt worden ingevuld. Beschouw een willekeurige $\epsilon > 0$. Als $\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma) \leq x$ en $\sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu) > -\epsilon$, dan volgt met (1) dat $\sqrt{n}(S_n - \sigma) \leq x + \epsilon$. Derhalve

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma) \leq x\big) &= \mathbb{P}\big(\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma) \leq x, \sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu) > -\epsilon\big) \\ &\quad + \mathbb{P}\big(\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma) \leq x, \sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu) \leq -\epsilon\big) \\ &\leq \mathbb{P}\big(\sqrt{n}(S_n - \sigma) \leq x + \epsilon\big) + \mathbb{P}\big(n(\hat{\mu}_n - \mu) \leq -\sqrt{n}\epsilon\big). \end{aligned}$$

De eerste term aan de rechterkant convergeert naar $G(x + \epsilon)$ met G de verdelingsfunctie van de normale verdeling uit opgave 3. Voor een gegeven $M > 0$ is de tweede term aan de rechterkant kleiner dan $\mathbb{P}\big(n(\hat{\mu}_n - \mu) \leq -M\big)$ zodra n voldoende groot is opdat $\sqrt{n}\epsilon > M$. Vanwege opgave 2 convergeert de laatste kans voor vaste M naar $F(-M)$ met F de verdelingsfunctie uit opgave 2. Combinatie van deze feiten geeft

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma) \leq x\big) \leq G(x + \epsilon) + F(-M).$$

Deze ongelijkheid hebben we bewezen voor iedere $M > 0$ en iedere $\epsilon > 0$. De linkerkant is niet afhankelijk van M of ϵ en is derhalve ook kleiner aan de lim inf van de rechterkant als $M \uparrow \infty$ en $\epsilon \downarrow 0$, d.w.z.

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma) \leq x\big) \leq G(x).$$

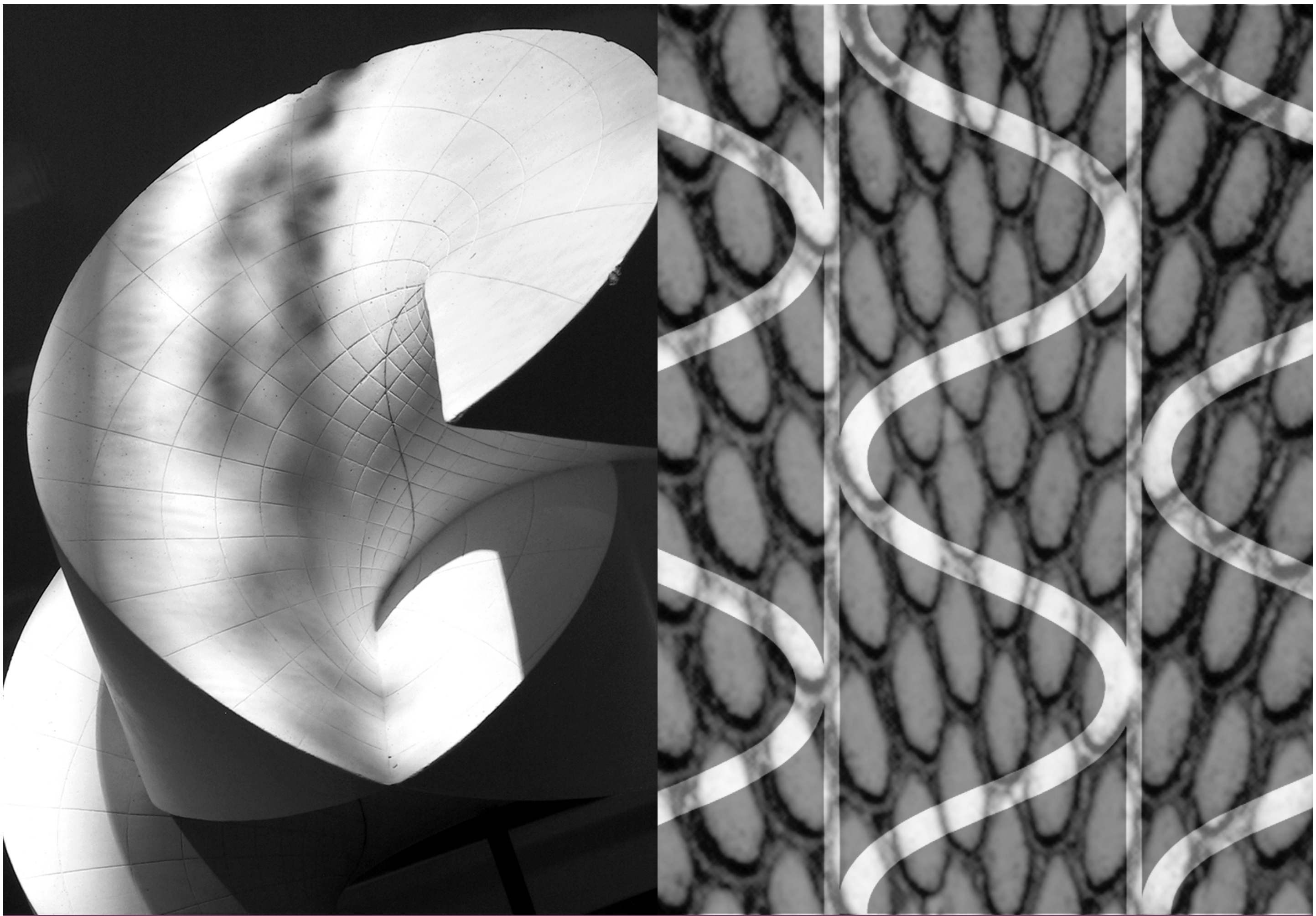
Dit is de helft van de te bewijzen bewering. De andere helft is

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma) \leq x\big) \geq G(x).$$

Om deze bewering te bewijzen is het handig om deze eerst te herschrijven als

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma) > x\big) \leq 1 - G(x).$$

We volgen nu een soortgelijk argument, beginnend met de vaststelling dat $\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma) > x$ en $\sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu) < \epsilon$, impliceert dat $\sqrt{n}(S_n - \sigma) > x - \epsilon$.



De Universiteit van A naar Bèta

'Wiskundigen hebben een bepaald inzicht in problemen, doordat ze denken in modellen en abstracties. Wij hebben daardoor een voordeel bij het onderzoeken van toepassingen.' Aldus prof. dr. Lex Schrijver, hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam, die op 23 november 2005 de NWO-Spinozapremie ontving.

Wiskunde in de praktijk

Wiskundigen aan de Universiteit van Amsterdam houden zich bezig met uiteenlopende deelgebieden van de wiskunde. Eén van de vraagstukken waar Lex Schrijver zich de afgelopen jaren over heeft gebogen is het optimaliseren van de dienstregeling van de NS. Hoe kunnen de treinen zo worden ingezet dat de reisduur voor iedereen zo kort mogelijk is en er voldoende zitplaatsen zijn? Volgens hem maakt de combinatie van uitdagende wiskunde en aansprekende praktijkvoorbeelden zijn vakgebied aantrekkelijk. 'Er zijn praktijkvoorbeelden genoeg in mijn vakgebied. Neem het handelsreizigersprobleem: het bepalen van de kortste route van A naar B langs een bepaald aantal plaatsen. Dit probleem is niet alleen academisch van aard maar heeft diverse toepassingen in de praktijk. Een ander voorbeeld uit de industrie, naast de dienstregeling van de NS, is het bepalen van de meest efficiënte "route" voor het boren van honderden gaatjes in een computerchip.' Een deel van de Spinozapremie, die Schrijver onder meer ontving voor zijn baanbrekende en inspirerende onderzoek op het gebied van combinatoriek en algoritmiek, zal hij inzetten voor versterking van de band tussen wiskunde en haar toepassing.

Wiskunde aan de UvA

Aan de UvA wordt een breed scala aan wiskunde aangeboden, van zuivere wiskunde, inclusief logica, tot toegepaste wiskunde, statistiek en financiële wiskunde. Op al deze gebieden heeft de UvA binnen de wetenschap een naam hoog te houden. Voor studenten is dit ook aantrekkelijk, omdat docenten de onderzoeksresultaten van vandaag verwerken in de colleges van morgen.

Je master aan de UvA?

- Logic
- Mathematical Physics
- Mathematics
- Stochastics and Financial Mathematics
- Theoretical Physics

Meer informatie:
www.studeren.uva.nl/science-masters

Universiteit van Amsterdam

06119

It is not knowledge, but the act of learning, not possession but the act of getting there, which grants the greatest enjoyment. When I have clarified and exhausted a subject, then I turn away from it, in order to go into darkness again; the never-satisfied man is so strange if he has completed a structure, then it is not in order to dwell in it peacefully, but in order to begin another. I imagine the world conqueror must feel thus, who, after one kingdom is scarcely conquered, stretches out his arms for others.

Karl Friedrich Gauss (1777-1855)